جبر (2) عملي

المحاضرة السابعة عملي جبر

تمرين:

ليكن لدينا المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

- ادرس قابلية A للاستقطار وأوجد المصفوفة P المقطرة لـ A
- أوجد المصفوفة القطرية المشابهة لـ A
- تحقق أن $D = P^{-1} A P$

الحل:

نوجد القيم الذاتية لـ A وهي جذور المعادلة

$$d(\lambda) = |\lambda E - A|$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

ننشر وفق العمود الثاني

$$d(\lambda) = (-1)^{2+2} (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1) \left[(\lambda-2)^2 - 1 \right]$$

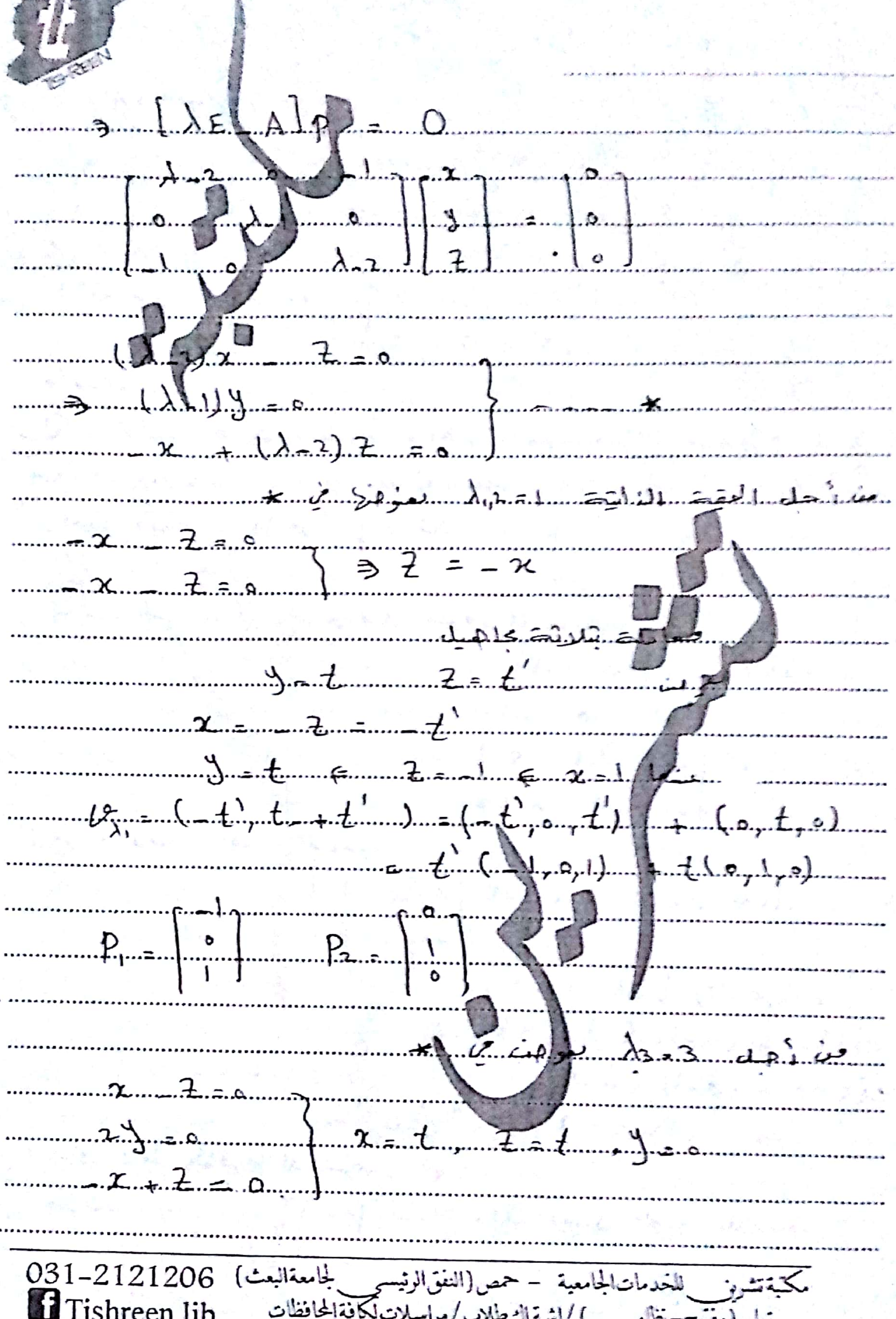
$$d(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda^2 - 4\lambda + 3)$$

$$d(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-3)$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \qquad \lambda_3 = 3$$

وهي القيم الذاتية للمصفوفة P

بفرض أن $P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ شعاع ذاتي يقابل القيمة الذاتية λ



$\Rightarrow [\lambda E - A]P = 0$

$$\begin{bmatrix} \lambda-2 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} (\lambda-2)x - z &= 0 \\ \Rightarrow (\lambda-1)y &= 0 \\ -x + (\lambda-2)z &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ --- } *$$

من أجل القيمة الذاتية $\lambda_{1,2} = 1$ نعوض في *

$$\left.\begin{aligned} -x - z &= 0 \\ -x - z &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow z = -x$$

جملة بثلاثة مجاهيل

نفرض $y = t \qquad z = t'$

$x = -z = -t'$

$y = t \Leftarrow z = -1 \Leftarrow x = 1$ مثلا

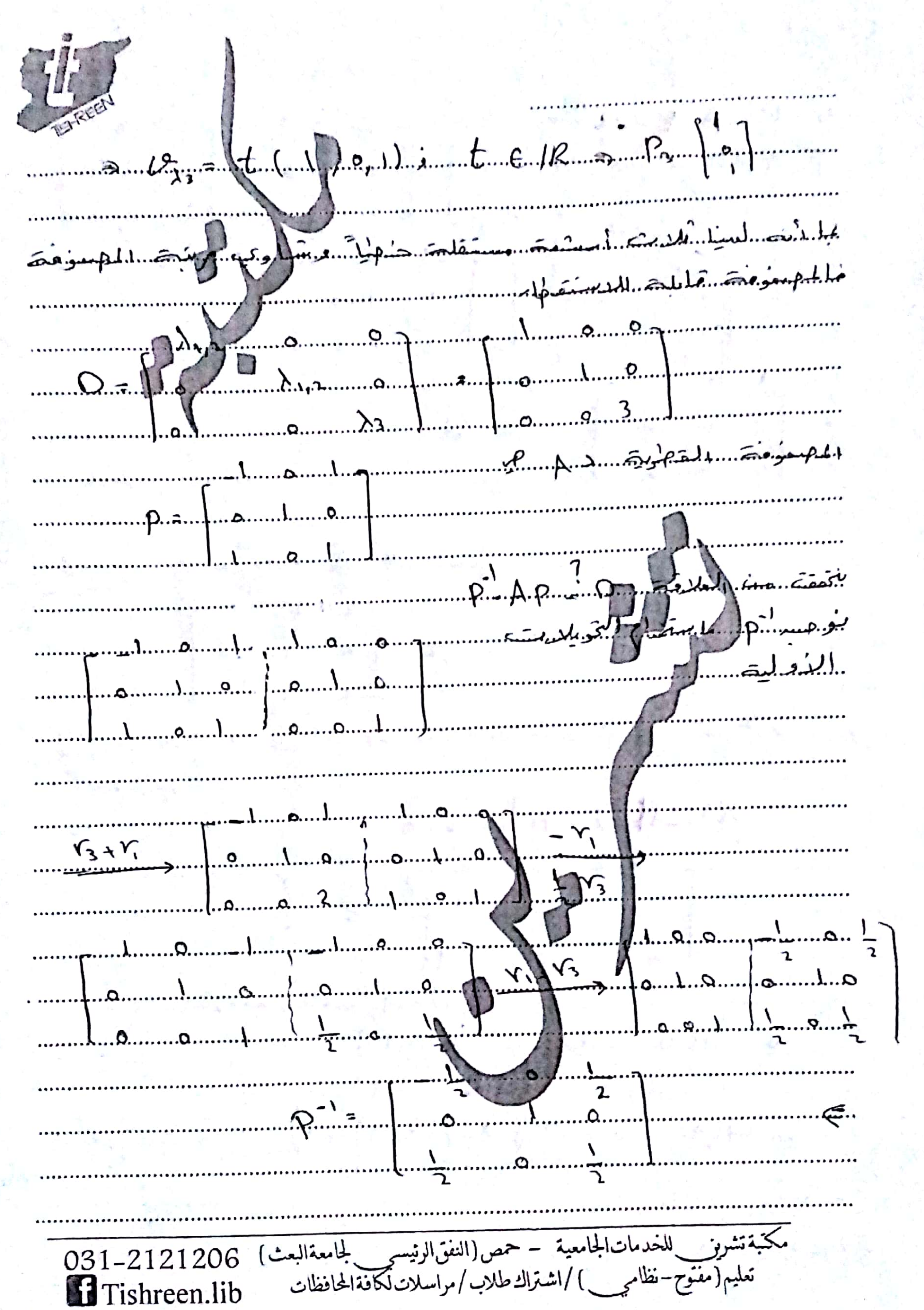
$v_{\lambda_1} = (-t', t, +t') = (-t', 0, t') + (0, t, 0)$

$= t'(-1, 0, 1) + t(0, 1, 0)$

$$P_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

من أجل $\lambda_3 = 3$ نعوض في *

$$\left.\begin{aligned} x - z &= 0 \\ 2y &= 0 \\ -x + z &= 0 \end{aligned}\right\} x = t, \quad z = t, \quad y = 0$$



$\Rightarrow v_{\lambda_3} = t(1,0,1) \; ; \; t \in \mathbb{R} \Rightarrow P_3 \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

بما أنه لدينا ثلاثة أشعة مستقلة خطياً وتساوي مرتبة المصفوفة فالمصفوفة قابلة للاستقطار

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_{1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

المصفوفة القطرية لـ A هي

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نتحقق من العلاقة $P^{-1}.A.P \overset{?}{=} D$

نوجد P^{-1} باستخدام التحويلات الأولية

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2} r_3]{-r_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 + r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\Leftarrow \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = D$$

ومنه العلاقة محققة

تمرين: ليكن A المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل: نقوم بإيجاد القيم الذاتية والأشعة الذاتية عن طريق كثير الحدود المميز

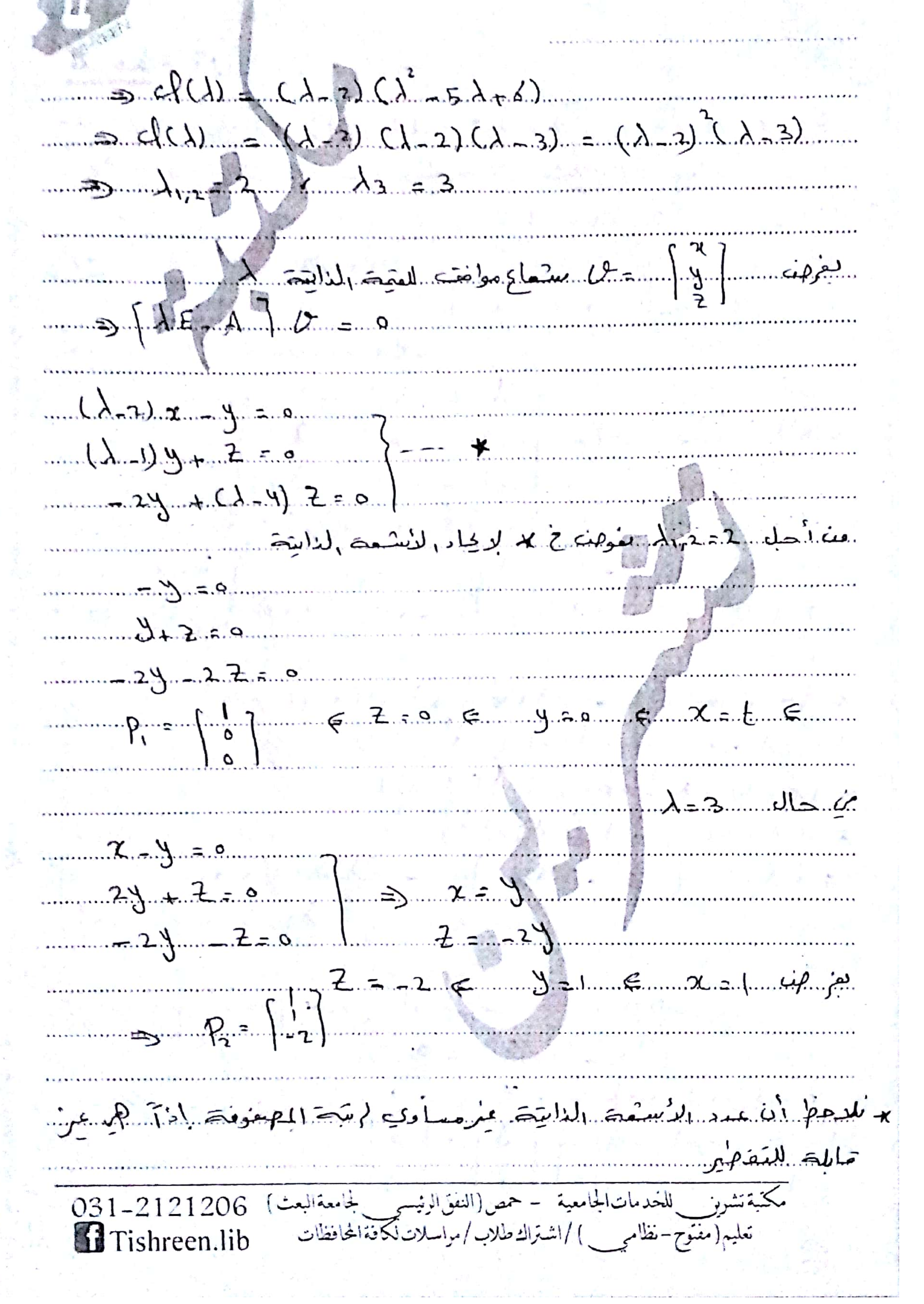
$$cl(\lambda) = |\lambda E - A|$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

ننشر حسب العمود الأول

$$\Rightarrow cl(\lambda) = (\lambda-2) \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -2 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow cl(\lambda) = (\lambda-2)\big((\lambda-1)(\lambda-4)+2\big)$$



⇒ $d(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda^2-5\lambda+6)$

⇒ $d(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-3) = (\lambda-2)^2(\lambda-3)$

⇒ $\lambda_{1,2}=2$ ، $\lambda_3=3$

نفرض $v=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ شعاع موافق للقيمة الذاتية λ

⇒ $[\lambda E - A]\,v = 0$

$$\left.\begin{aligned}(\lambda-2)x - y &= 0\\(\lambda-1)y + z &= 0\\-2y + (\lambda-4)z &= 0\end{aligned}\right\} \text{---} \; *$$

من أجل $\lambda_{1,2}=2$ نعوض في * لإيجاد الأشعة الذاتية

$-y=0$

$y+z=0$

$-2y-2z=0$

$P_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ ⇐ $z=0$ ⇐ $y=0$ ⇐ $x=t$ ⇐

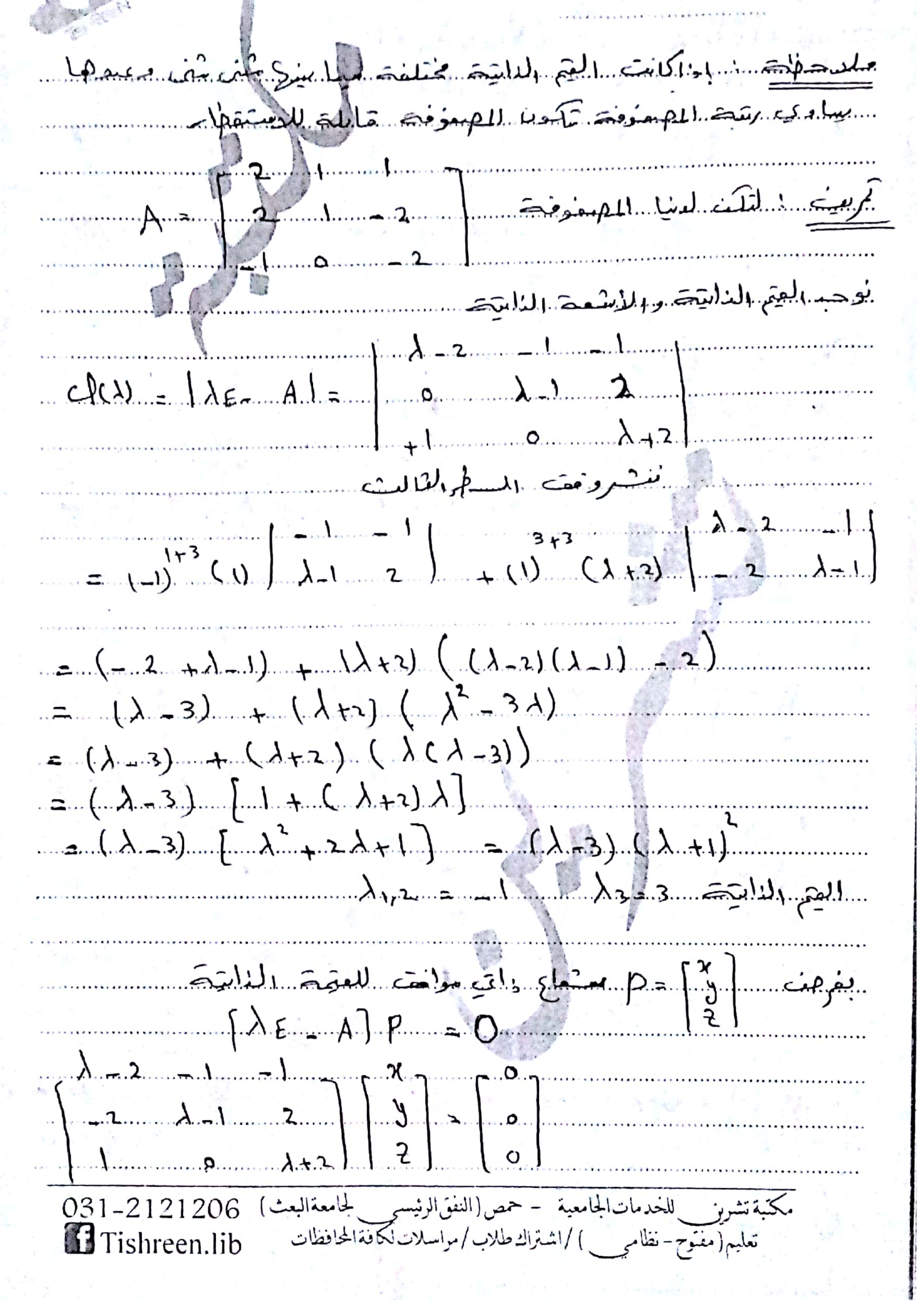
في حال $\lambda=3$

$$\left.\begin{aligned}x-y&=0\\2y+z&=0\\-2y-z&=0\end{aligned}\right| \Rightarrow \begin{aligned}x&=y\\z&=-2y\end{aligned}$$

نفرض $x=1$ ⇐ $y=1$ ⇐ $z=-2$

⇒ $P_2=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$

* نلاحظ أن عدد الأشعة الذاتية غير مساوي لرتبة المصفوفة إذاً هي غير قابلة للتقطير



ملاحظة: إذا كانت القيم الذاتية مختلفة فيما بينها مثنى مثنى وعددها يساوي رتبة المصفوفة تكون المصفوفة قابلة للاستقطار.

تمرين: لتكن لدينا المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

نوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية

$$cl(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 2 \\ +1 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}$$

ننشر وفق السطر الثالث

$$= (-1)^{1+3}(1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ \lambda-1 & 2 \end{vmatrix} + (1)^{3+3}(\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (-2+\lambda-1) + (\lambda+2)\left((\lambda-2)(\lambda-1)-2\right)$$

$$= (\lambda-3) + (\lambda+2)(\lambda^2-3\lambda)$$

$$= (\lambda-3) + (\lambda+2)(\lambda(\lambda-3))$$

$$= (\lambda-3)\left[1+(\lambda+2)\lambda\right]$$

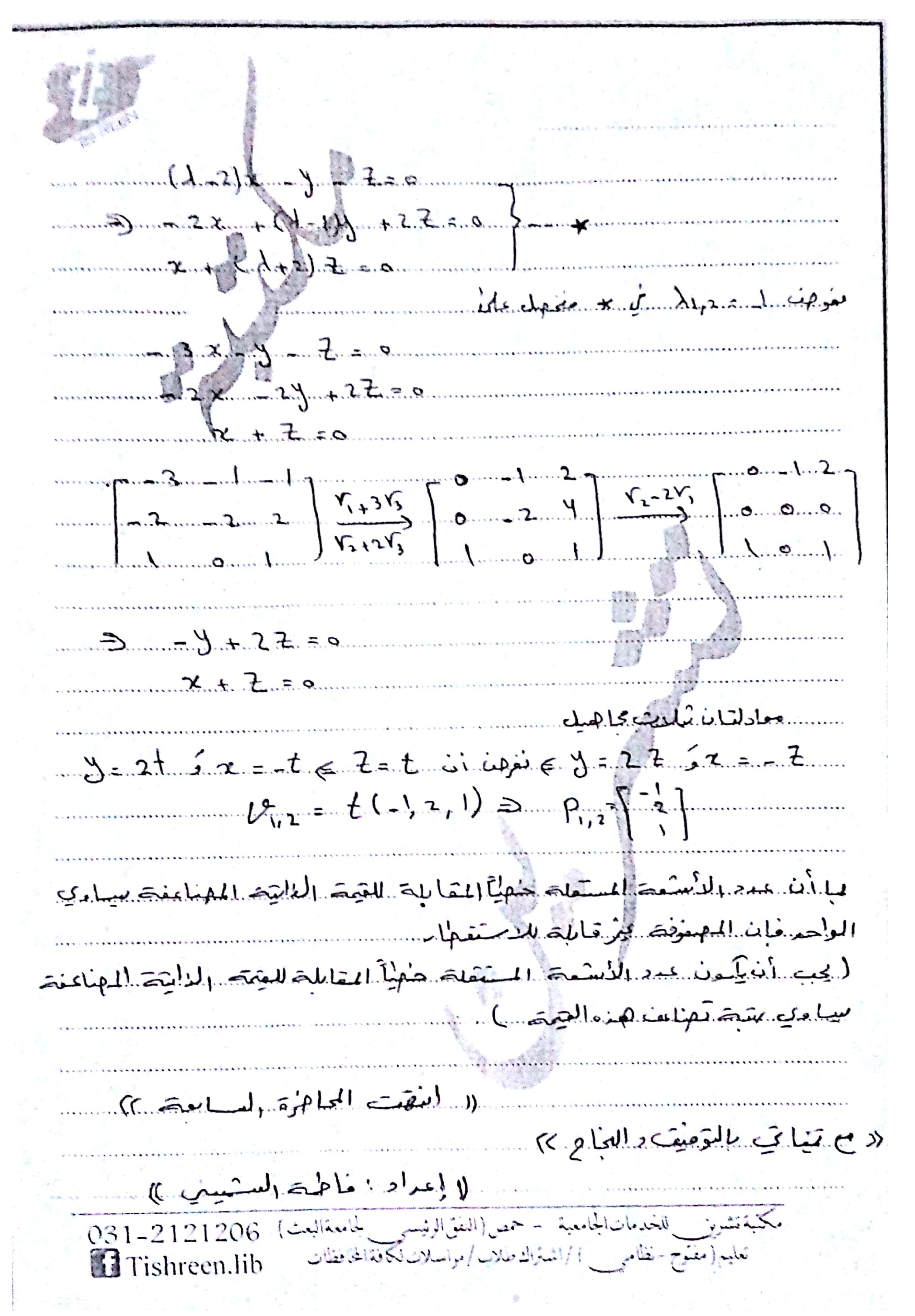
$$= (\lambda-3)\left[\lambda^2+2\lambda+1\right] = (\lambda-3)(\lambda+1)^2$$

القيم الذاتية $\lambda_{1,2} = -1 \quad \lambda_3 = 3$

بفرض $P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ شعاع ذاتي موافق للقيمة الذاتية

$$[\lambda E - A]P = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -2 & \lambda-1 & 2 \\ 1 & 0 & \lambda+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\left.\begin{aligned}(\lambda-2)x - y - z &= 0\\ \Rightarrow -2x + (\lambda-1)y + 2z &= 0\\ x + (\lambda+2)z &= 0\end{aligned}\right\} \dots *$$

نعوض $\lambda_{1,2} = -1$ في * فنحصل على

$$-3x - y - z = 0$$
$$-2x - 2y + 2z = 0$$
$$x + z = 0$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2+2r_3]{r_1+3r_3} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow -y + 2z = 0$$
$$x + z = 0$$

معادلتان بثلاث مجاهيل

$y = 2z$ و $x = -z$ ⇐ نفرض أن $z = t$ ⇐ $x = -t$ و $y = 2t$

$$v_{1,2} = t(-1, 2, 1) \Rightarrow P_{1,2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بما أن عدد الأشعة المستقلة خطياً المقابلة للقيمة الذاتية المضاعفة يساوي الواحد فإن المصفوفة غير قابلة للاستقطار.

(يجب أن يكون عدد الأشعة المستقلة خطياً المقابلة للقيمة الذاتية المضاعفة يساوي رتبة تضاعف هذه القيمة).

«انتهت المحاضرة السابعة»

«مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح»

«إعداد: فاطمة الشميسي»